Избрани наоди од
Собирање
Како да им помогнете на децата да учат математика[1]

Собирање,[129] издадена на 24 јануари 2001, се осврнува на изучување на математика во нивоата градинка до осмо (градинка до 13 години, заб.прев.) и на неопходната основа за изучување на математиката во погорните нивоа. Публикацијата го одразува консензусот постигнат после внимателно раз-ледување на постоечкото истражување, од страна на широка група од образовни работници во областите математика, истражувачка математика, когнитивна наука, педагогија и бизнис. Оваа група ги застапу-ваше и двете страни во нео-дамнешната дебата за изучување на математиката.

Претседателот на комитетот, Џереми Килпатрик, забележува дека оваа студија е на некој начин посеопфатна од претходно објавената студија. Студијата не само што се осврнува на погорните одделенија од третото, вели тој, туку математиката е посебен вид предмет и дисциплина. Извештајот дава консензус за тоа што претставува математичката вештина, како децата учат математика и како се достигнува добра настава по овој предмет. На крај дава пет препораки.

Петте препораки се:

1. Интегриран и врамнотежен развој на математичката вештина низ нивоата градинка-осмо одд.
2. Висококвалитетен стручен развој на наставниците, одржлив и внимателно осмислен.
3. Наставните помагала, училишната организација и оценувањето да бидат насочени кон математичката способност.
4. Прибирање научни докази за различни методи користени за зголемување на математичката подготвеност.
5. Одредување на области кои бараат дополнително истражување.

Со избрани зборови, резимето на извештајот се осврнува на знаењето по математика со кое децата доаѓаат на училиште, потребата за процедурално и за концептуално разбирање, важноста на начинот на кој наставниците ја осмислуваат и ја

---

[129] Публикација на Одборот за изучување на математиката од 2001 година, на Националниот истражувачки совет. Издание на National Academy Press.

презентираат работата на учениците, како ги вклучуваат во конверзација и како ги изразуваат очекувањата. Исто така, се осврнува на математичкото знаење што наставникот треба да го поседува. Бидејќи броевите се застапени во целата математика низ нивоата градинка-осмо одделение и бидејќи најголемиот дел од истражувањата се направени во оваа област, особено внимание е ставено на развојот на вештините со целите броеви и со рационалните броеви. Останатите вештини, иако потврдени како потребни на сите нивоа, имаат добиено помало внимание.Повеќе детали на http://books.nap.edu/catalog.php?record_id=9822#toc

Следуваат одбрани извадоци.

БРОЈ: ШТО Е ПОТРЕБНО ДА СЕ ЗНАЕ?

Броевите се идеи или абстракции применети на голем спектар вистински и замислени ситуации. Такви се и операциите со броеви. А сепак, за да комуницираат низ броеви и операции, на луѓето им требаат претстави – физички, говорни или пишани. Исто така им требаат и алгоритми, со кои ги изведуваат овие операции.

Броење–Броењето е сложен процес што се изведува во фази. Броењето е основа за решавање на основните проблеми на собирање, одземање, множење и одземање со цели броеви.

Нула–Нулата (како идеа) ја наоѓаме во најраните школски години, но нулата (како број) за некои ученици и наставници претставува сериозна препрека.

Претстави–Секоја операција има неколку **конкретни толкувања**. Броевите и операциите во училишната математика се организирани во нумерички – бројни системи, а секој систем дава **начини за истовремено работење со броевите и со операциите,** и на тој начин им овозможува на учениците да се фокусираат на структурата на и правилата во тој систем. Сите системи на математиката што е изучувана во нивоата пред нивото градинка и до осмо одделение, се наоѓаат во единствен систем што е претставен со **број**. Сите идеи бараат претставување, а нивната корисност е зголемена преку **повеќекратни претстави.** Бидејќи секоја претстава има свои предности и негативности, мора да разликуваме и да ги интерпретираме истите. Пресметувањето бара **алгоритми,** а треба да се одлучи кој да се употреби, зашто секој алгоритам има свои предности и маани. За добро да ја извежбаат математиката до осмо оделение, децата мора добро да ги владеат **броевите и операциите,** разгледани во ова поглавје, како и да ја владеат **основната алгебра, мерките, просторот, податоците, соодносот и пропорцијата.**

Апстракцијата е она што ја прави математиката. Ако премногу се концентрирате на некоја ограничена примена на една математичка идеја, со тоа и ги одземате на математиката нејзините најважни орудија: **аналогијата, обопштеноста и едноставноста.** (Стјуарт)

Рационалните броеви по сè изгледа претставуваат поголема тешкотија за учениците, отколку **негативните цели броеви**.

ШТО Е ПОЗНАВАЊЕ НА МАТЕМАТИКАТА?

Познавање на математиката е она што сметаме[130] дека е неопходно секој да го научи, за да ја владее математиката. Владеењето на математиката, као што ние ја гледаме, има пет делови или насоки: Петте насоки даваат рамка за разгледување на знаењето, вештините, способностите и убедувањата кои го претставуваат познавањето на математиката. Оваа рамка има извесни сличности со онаа што ја користеше NAEP, која што вклучува концептуално разбирање, познавање на постапките и решавање задачи, и која што вклучува дополнителни одредби за резонирање, поврзување и комуницирање. Владеењето на математиката не може да се постигне со фокусирање само на една или две од овие насоки.

Овие насоки ја изразуваат големата бројка на школска литература, во и вон матема-тичката наука. Ритл-Џонсон (Rittle-Johnson) и Сиглер (Seigler), (1998) заклучуваат дека **концептуалното и поз-навањето на постапките се силно взаемно поврзани, и дека редот на развој зависи од математичката содржина и од учениците и нивната настава, особено за повеќе-цифрената аритметика.**

Концептуално разбирање – познавање на математичките концепти, операции и релации.

Концептуалното разбирање се однесува на едно интегрирано и функционално владеење на математичките идеи. *Учениците со концептуално разбирање знаат нешто повеќе од изолирани факти и методи.* Тие сфаќаат зошто една матема-тичка идеја е важна и во кои контексти таа е корисна. Овие ученици го организираат свое-то знаење во една неразбиена целина, што им овозможува да воспримат нови идеи преку поврзување на ваквите идеи со она што веќе го знаат. Концептуалното

130 Одбор за изучување на математиката

разбирање оди во прилог на одржување на знаењето. Иако наставниците често го бараат доказот за концептуалното разбирање во способноста на ученикот да ги вербализира врските помеѓу различните концепти и претстави, концептуалното познавање не е потребно да биде јасно изразено. Често пати учениците разбираат и пред да можат да го вербализираат ова разбирање.

Јасен знак за постоење на концептуално разбирање е кога математичките ситуации можеме да ги претставиме на различни начини и кога знаеме дека различните претстави може да се искористат за различни цели.

Истражувачите укажуваат на постоење јасна врска помеѓу "уличната математика" на учениците и училишната математика, што укажува на тоа дека *знаењето стекнато без разбирање, се стекнува како изолиран сегмент на тоа знаење.* Концептуалното разбирање бара знаење што е поврзано.

Процедурална флуентност - изведувње постапка на лесен, точен, брз и соодветен начин.

Сметањето сѐ повеќе се смета за врата што води кон длабоката структура на системот на броеви. Измените (во општеството) бараат сѐ повеќе од науката на сметањето. И вештото изведување и концептуалното разбирање се создаваат од истите видови активности. Не се потребни никакви откажувања. Едноцифрената аритметика, во САД е нарекувана "учење на основни факти" и фокусот е ставен на меморирање на овие факти напамет. Со терминот комбинации на основните бројки, се користиме за да истакнеме дека знаењето е поврзувачко и дека не мора да биде запомнето - напамет. Возрасните и "стручните" деца користат разни стратегии, меѓу кои и автоматските или полуавтоматските правила и процеси на резонирање, за навремено да ги произведат комбинациите со основните броеви. Поврзувачкото знаење, како комутативноста, не само што го засилува учењето на комбинации со основните броеви,туку можеби исто така е во основата на менталната претстава (или ја афектира истата) на основното знаење.

Иако едукаторите порано верувале дека децата ги помнат "основните факти" како условни одговори, истражувањата укажуваат дека децата не преоѓаат од никакво познавање за собирањето и одземањето, кон помнење на комбинациите со основните броеви. Наместо ова, тие проаѓаат низ серија од прогресивно–понапредни и апстрактни методи за изработка на одговорите на едноставните аритметички проблеми. Згора на ова, како што стануваат повозрасни, децата сѐ подобро ги користат овие процедури. Не сите деца ја следат истата патека, но сите деца развиваат некакви средни и привремени процедури.

Потсетувањето во крајна граница е главен метод за некои деца, но не поседуваме соодветни истражувачки методи за да ги разликуваме одговорите дадени по пат на потсетување и оние произведени по пат на брзи процедури (не по пат на потсетување).

Стратегиска способност - способност за формулирање, поставување и решавање математички проблеми.

Карпентер и останатите, открија дека кога децата се фокусирани да решат некоја задача, не само што подобро ја решаваат, туку и совладуваат повеќе комбинации, од децата чија подука се состои од вежби и практикување на основните факти. Браунел и Чазел (Brownell; Chazell, 1935) откри-ле дека вежбата на аритметичките факти не мора да доведе до потсетување. И покрај веж-бањето, децата и понатаму ги употребуваат постапките што ги задоволуваат нивните ну-мерички потреби. Вежбањето не ги оспособува децата да решаваат броеви комбинации на позрел начин. Тие тврдат дека на вежбата треба да претходи звучна подука.

Еден од најзначајните контексти во кои малите деца ја развиваат способноста со целите броеви, претставуваат поставените задачи со некој проблем, или текстуални проблеми. Ако децата знаат да бројат, почнуваат да го користат броењето при решавање на едноставни текстуални проблеми. Всушност, при самото решавање на текстуалните проблеми, дечињата можат да го искористат своето најнапредно знаење на броењето, како и да создадат репертоар на постапки во сметањето. Децата често создаваат проблемски ситуации за кои измислуваат постапки кои ги отсликуваат тие активности. Ваквиот едноставен но значаен простап ја одржува процедуралната флуентност во непосредна близина на концептуалното разбирање.

Децата најпрво ги решаваат оние задачи што ги разбираат, задачи што можат да ги претстават или обликуваат служејќи се со физички облици, и што вклучуваат броеви што веќе ги научиле. Ваквиот пристап им овозможува да решат зачудувачки голем дијапазон задачи и проблеми, вклучувајќи ги и оние со множење и делење. Бидејќи децата ги решаваат текстуалните задачи интуитивно, преку моделирање на дејството и односите кои се опишани во нив, битно е да се направи разлика помеѓу различните видови задачи (проблеми) што може да бидат поставени преку собирање и одземање, и помеѓу задачите кои имат множење и делење.

Менталните претстави играат централна улога.

Начинот на којшто учениците ги замислуваат и поврзуваат делчињата на знаењето, е клучен фактор за тоа дали добро ќе го разберат и ќе го употребат при решавање на задачите. Когнитивните научници заклучиле дека **способноста во истражувањето** *зависи од знаењето што не е само сочувано, туку е и ментално претставено и организирано (поврзано и струк-турирано) на начин со кој се овозможува лесно потсетува-ње и примена.*

Прилагодливо размислување – капацитет за лигичка мисла, рефлексија, објаснување и оправдување.

Прилагодена експертиза е она што уште се нарекува мета-знаење –познавањето на сопственото размислување како и способноста за набљудување на сопственото разбирање и дејството на решавање на проблемите, ја помагаат стратегиската способност и прилагодливото размислување.

Продуктивна природа –гледање на математиката како на разумна и корисна, надополнето со верба во трудољубивост и сопствено делување.

Со ваков еден став кон математиката, ученикот нема лесно да се откаже, верува дека вложениот напор во размислување на задачите ќе даде резултат, и е убеден дека ќе ја разбере поставената задача и што се бара од него.

Други забелешки од извештајот

- Долготрајниот тренд на NAEP во математичкоот оценување “става повеќе тежина врз познавањето на основните факти од страна на ученикот и врз неговата способност да изведе нумерички алгоритми со употреба на молив и хартија, да покаже знаење за основните мерни формули што се употребуваат во геометријата и да да затвара прашања со што ќе одразува директна примена на математиката во секојдневните животни ситуации.”

- Извештајот открива неколку видови задачи од собирање и одземање кои вклучуваат: претставување на два броја како збир и разлика од трет број, придружување, разделување и споредување.

- Процедурите смислени од учениците не се секогаш алгоритми, затоа што чекорите не се прецизно наведени, туку само следат насока која се кристализира низ самиот процес.

- Не е толку јасно како учени-ците ги совладуваат **рационалните броеви,** како што е јасно како ги совладуваат целите броеви. Најпрво, учениците имаат неформално сфаќање за пресекот, дис-јунктните множества, и проценување на инструкцијата врз која ќе развиваат понатаму. Второ, во конвенцио-налната наставна програма, совладувањето на рационалните броеви од страна на учениците не е рамномерно низ петте насоки, што често пати се изолирани една од друга. Трето, *совладувањето на рационалните броеви зависи од тоа колку наставата на час е добро осмислена и колку таа им дава време на учениците да создадат и да одржат блиси врски со различните насоки.*

- Повеќето деца се преокупирани со тоа дали секој ќе добие еднаков број од нешто, отколку од неговата големина. Како што напредуваат од најниските одделенија нагоре, децата стануваат почувствителни за големината на елементите.

- Шемата што ги наведуваше истражувањата на рационалните броеви во изминативе две декади, ги открива следниве **интерпретации** за секој рационален број: *релацијата дропка (дел од цело), количник, мерка/степен, соднос и операција со која се зголемува или намалува големината на нештото. Наставната пракса што наклонува кон предвремена абстракција и прекумерно користење на симболи, доведува до тоа учениците да имаат сериозни тешкотии при прикажување на рационалните броеви со стандардните пишани симболи и при соодветното користење на симболите.*

- Сегашната настава често пати става недоволно внимание врз развивање на значењето на различните рационални нумерички претстави и врз нивните спoеви. Доказ за ваквата запоставеност е дека поголемиот број ученици во САД ги научиле правилата за пренос на облиците, но малку ги разбираат количествата што тие симболи ги претставуваат, па следствено прават чести и несфатливи грешки.

- Активностите по алгебра вклучуваат докажување, претставување, трансформирање, обопштување. Алгебрата се надоврзува на знаењето што учениците го стекнале по аритметика, и го надоградува понатаму. Посебно, *системот место-вредност за нумерација што се користи во аритметиката, имплицитно ги вклучува некои од основните концепти на алгебрата, а алгоритмите на аритметиката многу зависат од "законите на алгебрата."*

- Ако сакаме да ја разбереме врската помеѓу математиката што се изучува во основното образование и алгебрата, корисно е да *ја разликуваме алгебрата како систематски метод за изразување на обопштеноста и апстракцијата,* вклучувајќи ја алгебрата и обопштената аритметика, *и алгебрата како синтактичко водење на трансформациите на симболите.* Првото се претвора во активности како пренесување на говорните информации во симболи и равенки, кои често пати, но не редовно, вклучуваат функции.

- Познавањето на репрезентативните активности вклучува концептуално разбирање на математичките концепти, операции и релации изразени во говорната информација, и вклучува стратегиска способност за формулирање и претставување на таквата информација со алгебарски равенки и изрази.

- Алгебарските трансформации, во најголем дел се поврзани со менување (замена) на обликот на изразот или на равенката, во еквивалентен облик, користејќи ги правилата за користење на алгебарските симболи. Аспектите на концептуалното познавање и на процедуралната тековност, во овој случај взаемно дејствуваат.

- Обопштувањето и докажувањето вклучуваат решавање проблеми (задачи), моделирање, запис на начинот на решавање, докажување и предвидување. И не само во алгебрата, тие често пати го користат својот јазик и алатките.

НАСТАВА ЗА ЗНАЕЊЕ

Материјалите од наставата програма им помагаат на наставниците и учениците во нивната работа, но и едните и другите може да *се разликуваат во нивните интерпретации и користењето на истата содржина, и во истите ресурси на програмата.* Згора на тоа, поучувањето се одвива во одреден контекст.

Голем дел од постоечката дебата се однесува на облиците и на **пристапот кон наставата**: “директна настава” наспроти “распрашување,” “ориентирана кон наставникот” наспроти “ориентирана кон ученикот,” “традиционална” наспроти “ре-формирана.” Ваквите *етикети создаваат реторички разлики што честопати ја промашуваат поентата за квалитетот на наставата.* Овој преглед на истражувањата што се напра-вени, јасно укажува дека делотворноста на математичката настава и изучување не може да се сведе на едноставни ети-кети. Во случајов, **квалитетот на наставата е функција од знаењето на наставникот и употребата на математичката содржина, на вниманието и на начинот на кој наставникот ги третира учениците и на ангажирањето на учениците во математичките задачи и нивното користење**. Згора на тоа, *делотворното подучувањеона кое го прифаќа развојот на математичкото знаење, со текот на времето поприма различни облици.*

Висококвалитетно поучување, иако доаѓа во различни облици, се фокусира на битната математичка содржина, претставена и развиена во целина. Тоа подразбира земање предвид на постоечкото знаење на ученикот и начинот на размислување, но и на начините како овие да се доразвијат. Делотворната настава сепак зависи од неделивата врска што се развива со тек на времето помеѓу лекциите што здружено целат да постигнат важни математички цели.

Наставниците мора да имаат јасна визија за целта на наставата и за тоа што значи владеење на содржината што ја предаваат. Наставниците треба да ја познаваат математиката што ја подучуваат како и хоризонтот на таа математика – до каде оди истата и каде таа ги води нивните ученици. Тие треба да се способни да го искористат знаењето во пракса, на еден флексибилен начин, за да ги оценат и адаптираат наставните материјали, да ја претставаат содржината на еден чесен и пристапен начин, да ја испланираат и да ја изведат наставата, и да го оценат она што учениците го учат. Наставникот мора да ја протолкува писмената работа на ученикот, да го анализира неговото размислување, и да одговори на различните методи што ги користел ученикот при решавање на некој проблем. Наставата подразбира способност да се согледаат сите математички можности на една задача.

Три вида на знаење се најважни во наставата по математика во училиштата:

1. Познавање на математиката,
2. Познавање на учениците, и
3. Познавање на наставната пракса.

Оваа пракса вклучува:

- *Да се знае како може да се претставaт математичките идеи*
- *Да се познаваат нормите и стандардите на докажување со кои е изведен аргументот и доказот*
- *Да се познаваат најчестите тешкотии со кои учениците се среќаваат*
- *Да се познава парадигмата и пристапот кои го обликуваат размислувањето на ученикот*
- *Да се познава наставната програма, задачите и ресурсите кои се потребни за развивање на математичкото знаење.*

Математиката во основното и средното образование не е безначајна, а нејзините основни концепти и структура заслужуваат да добијат една сериозна и издржана студија од страна на наставниците.

Од *Журнал за математичко однесување* 14, 349-362 (1995)

ПРЕМОСТУВАЊЕ НА РАЗМИСЛУВАЊЕТО НА ВТОРО - ОДДЕЛЕНЦИТЕ И МАТЕМАТИЧКОТО ЗАПИШУВАЊЕ

Алис Џ. Гил
Американска федерација на наставници
Арлин Томсон
Основоно училиште „Вејлс Гејт“, Њубург, Њујорк

Фокусот на оваа статија е како да се запише она што го прават и велат учениците за да ги отсликува делата или мислите на учениците отколку да се прикаже еден обичен алгоритам кој не е поврзан со размислувањето на учениците. Ова ги насликува повеќекратните стратегии кои ги искористи една група на второодделенци која реши задача со три збира и како наставничката доследно се обидува да го внесе нивното размислување во системот на математичкото запишување. Акцентот е ставен на постапното поврзување на делата, мислите и симболите кои мораат да се случат. АФН програмата *Размислувајте математички* која ја користеше наставничката кратко е опишана како и тоа како наставничката разви чувство за броеви и култура на броеви во кои се почитува размислувањето на учениците. Статијата потенцира дека на наставниците им е потребно искуство во професионалниот развој кое им помага да разберат како децата најдобро учат математика за да можат ефективно да се справат со потребите на една група од хетерогени ученици и да ги подотворат портите за еден поголем успех.

Гласниот повик да се доведат учениците од САД до едно светско ниво во математиката и науката му претходеше на развојот на Математичките стандарди на националниот совет на наставници (МСНСН) кои беа објавени во 1989. Тие продолжуваат и денес се втемелени во Националните цели 2000. Иако се постигна голем напредок во некои делови од повикот за промена на начинот на кој се изучува математиката, малку се промени за најголемиот дел од учениците. Тие се уште заостануваат зад нивните светски врсници и ги разочаруваат своите идни работодавци. Најголемиот дел од наставниците во основното образование најголемиот дел од својот приватен и професионален живот се потопени во една култура која го дефинираше математичкото знаење преку учењето на памет на формули и ефикасното пресметување. Ова искуство им отежнува на многумина да прифатат и/или да создадат една училница во која математичката моќ се изградува заедно со почитувањето на интуитивните идеи на учениците, допустливо е да се понуди сопствен начин на размислување и несложувањето постанува основа на едно поцврсто знаење. Во ваквата училница, учениците со различни нивоа на успех успешно работеа на истите задачи користејќи најразлични начини и сите се здобиваат со математичко знаење. Додека еден ученик од една страна на дијапазонот користи конкретни броители, друг работи од една илустрација која самиот ја нацртал, а трет размислува во својата глава со апстрактни броеви, додека пак многумина ги спојуваат своите разбирања во мали групи. Таквата училница е во согласност со МСНСН стандардите и би требало, според когнитивното истражување да помогне во создавањето на ученици со највисоки нивоа на математичко знаење. Сепак, и покрај бројните напори повторно да се образува наставничкиот персонал, ова не е вообичаена сцена денес во најголемиот дел од училишта во САД.

Предизвици

За да се добие широка поддршка за промената на изучувањето на математиката и за да се зголемат постигањата на учениците потребно е (а) да се прифати дека е потребна промена, (б) поголемо разбирање на природата на математика од страна на оние кои ја предаваат истата, (в) верба од страна на наставниците дека тие можат да ги подржат многуте начини на кои децата размислуваат и учат математика како и да ги познаваат овие начини и (г) верба дека ако има се понуди на децата друг начин на изучувачко искуство истото нема да ја компромитира туку зголеми математичката содржина која ја изучуваат. Задачата да се убедат и наставниците и заедницата дека старата парадигма е недоволна за денешните потреби но дека истата има доследна замена која можат да ја сфатат наставниците кои можеби и самите имаат фобија од математика, се уште е голем предизвик. Но, многу работи се познати кои можат да им бидат од помош на наставните. Во 1988 година, со финансии од Националната фондација за наука (НФН), Американската федерација на наставници (АФН) и Центарот за истражување и развој на учењето (ЦИРУ) од Универзитетот на Питсбург направија напор да создадат начин за да се прошири она што им е познато за учењето и предавањето на математика на наставниците во основното образование. Тим од наставници од целата држава и истражувачки тим на чело со Лорен Ресник и Геја Лајнхарт од ЦИРУ работеа четири години испреплетувајќи ги резултатите од истражувањата со стручноста на наставниците[131] Еден резултат

[131] Наставниците беа Џудит Боденхаузен (Оукланд, Калифорнија), Ненси Денарт (Питсбург, Пенсилванија), Маргарет Кадус (Чипава Фолс, Висконсин), Марси Милер (Рочестер, Њујорк) и Алис Гил (Кивленд, Охајо).

беше програмата наречена *Математика со размислување* . Денес наставниците обучувачи се подготвени да ја рашират програмата во 49 училишни области низ државата, и има цело богатство од ентузијазам помеѓу наставниците, учениците и родителите кои се вклучени во програмата. Наставните кои го користат пристапот се вчудоневидени секојдневно од тоа колку многу знаат нивните ученици и колку можат како и колку можат истото да го распространат. Тоа што порано беше предмет од кој децата се плашеа сега постана омилен предмет. Наместо воздишките на часовите кога се изучува математика, наставните се жалат „Тие сакаат по цел ден да работат математика“. Една наставничка објаснуваше како секој ден кога ќе заврши часот таа мора да каже „Навистина морате да си одите, математика заврши“.

ДЕСЕТТЕ ПРИНЦИПИ НА МАТЕМАТИКАТА

Основата на овој пристап кон изучувањето на математиката лежи во Десете принципи кои го водат предавањето. Овие произлегоа од наодите на истражувањето (Боденхаузен, Денхарт, Гил и Милер, 1992).

1. Надоградете го интуитивното знаење на учениците (Карпентер, Хиберт и Мосер, 1981; Коб, Јакел и Вуд, 1988; Декорте и Фершејфел, 1987; Фусон, 1992; Нунес, Шлиеман и Карахер, 1993; Ресник, 1986; Рајли, Грино и Хелер, 1983).
2. Воспоставете силно чувство за броеви (Соудер, 1992).
3. Предавањето да се заснова на ситуациски приказни (Чарлс и Лестер, 1984; Гуд, 1994, -1984). Гроус и Ебмејер, 1983; НСПМ, 1989; Витли, 1983
4. Употреба на математички модели и други претстави (Фусон, 1992; Ресник и Омансон, 1987; Сујдам и Хигинс, 1977).
5. Барање учениците да го опишат и оправдаат своето математичко размислување (Ламперт, 1986; Ло, Витли и Смит, 1991; Путнам, Ламерт и Питерсон, 1990)
6. Урамнотежување на концептуалното и постапното учење (Карпентер, 1986; НСПМ, 1989).
7. Прифаќање на повеќе решенија и понекогаш одговори (Ламперт, 1986, 1992; Лајнхарт, 1987; Ресник, Билл и Лесголд, 1992).
8. Употреба на најразлични стратегии на предавање (НСПМ, 1991; Стенмарк, Томпсон и Коси, 1986).
9. Употреба на постојана проценка за да се води предавањето (Брајарс и Томпсон, 1990; Милер, 1991).
10. Промена на распоредот на наставната програма (Коб и Меркел, 1989; Фусон, Стиглер и Барч, 1988; Ламперт, 1986; Ресник и др., 1992).

Овие принципи се развија од работата на когнитивните и математичките истражувачи чија работа не само што ги подржува заклучоците на *Математика со размислување* , но и стандардите на НСПМ. Познавањето на истражувањето кое стои зад принципита и активностите за професионален развој кои се фокусираат на изградување на наставниците отколку едноставно нудење на серија активности, ги прави наставниците да се грижат за тоа како размислуваат децата, да ја развијат нивната можност да го направат видливо тоа размислување и да прифатат многу пристапи за решавање на задачите.
И содржината и постапката на развојот на вработените се важни за да им се овозможи на наставниците да ја прифатат оваа парадигма. За да се овозможи оваа склоност, *Математика со размислување* користи процес за развој на наставникот кој:

1. Се заснова на синтезата на интересните резултати од истражувањето кои што се синтетизирани на јазик кој е разбирлив за наставниците.
2. Внесува веродостојност во обуките така што обучувачи се наставници кои веќе работеле по програмата *Математика со размислување* во училницата.
3. Им овозможува на наставниците да го доживеат процесот преку улогите и на ученик и на наставник во една пријателска атмосфера.
4. Втемелува нови перспективи и разбирања за математичките идеи кои наставниците можеби не ги развиле за време на нивното образование преку разгледување на перспективи од деца кои истражуваат и се споредуваат со вообичаената пракса за време на професионалниот развој.
5. Одржува контакт откако ќе се заврши првичната обука со *Математика со размислување* центрите за обучука.

ЧИЕ РАЗМИСЛУВАЊЕ?

Насочувањето на тоа како размислува *ученикот* наместо тоа како размислува *наставникот* е централно за предавањето и учењето. Ова навистина е историски невообичаен начин да му се пристапи на изучувањето на математиката од градинка до четврта година средно образование. Ова бара наставникот да изгради мост меѓу интуитивните стратегии на учениците и нивната терминологија до поформалното запишување и поформалниот јазик. Оваа статија нуди поглед за тоа како еден наставник ја пополни значајната улога на поврзување на размислувањето на една група од второ одделенци на *Математика со размислување* со математичкото запишување. Од огромна важност е наставниците да заземат улоги различни од „кажувачи на точниот начин“ ако сакаат да го подржат и развијат размислувањето на учениците кое ќе овозможи достигнување на високи стандарди за различни и хетерогени групи на ученици. Има три аспекти на традиционалната улога на наставникот кои мораат да се променат. Прво, наставниците мораат да се склони кон тоа да им ги дозволат на учениците нивните мисли и начини и да одбегнат да избрзаат да им го покажат „ефикасниот алгоритам“. Второ, мораат да бидат доволно трпеливи да ги ислушаат децата и да направат напор да ги разберат начините на размислување кои можеби се различни од нивните. Трето, мораат да знаат доволно за математиката за да ги преведат овие идеи во симболи кои имаат смисла за децата и да го надополнат детскиот јазик каде тоа е соодветно со математичкиот јазик. Она што се работи постојано мора да биде математички точно. Ако наставниците не се чувствуваат удобно кога го прават ова, тие нема да го овозможат значајното градење на знаењето, туку ќе се вратат на еден модел на наставнички авторитет и несоодветната процедура на учење на памет.

ПОДРЖУВАЊЕ НА РАЗМИСЛУВАЊЕТО НА ВТОРО - ОДДЕЛЕНЦИТЕ

Училницата која ја разгледуваме во оваа статија ја сочинуваат второ-одделенци од Њубург, Њујорк. Наставничката Арлин Томсон ја доби својата *Математика со размислување* обука локално откако два наставника од областа ја завршија националната обука и се вратија да го применат пристапот и да го распространат истражувањето кое е неговата основа. Важно е да се забележи дека пред лекцијата од ноември за која зборуваме овде, Г-ѓа Томсон секојдневно работеше за да воспостави удобна атмосфера во која учениците беа охрабрувани да изнајдат многу начини да решат задачи, во кои се почитуваше нивното поединечно размислувањето, во која „грешките“ беа основа за понатамошно истражување наместо оценка за неуспех, и во која таа се обидуваше да го рашири разбирањето за да ги вклучи важните математички идеи. Учениците потрошија многу време истражувајќи ги и работејќи со помош на математичките модели со поголемите броеви на почетокот на годината. Градењето на чувството за броеви вклучуваше искуство со разложување и сложување на броеви. Учениците конструираа, одделува и делеа групи од предмети на многу начини користејќи се со јазикот за да ги објаснат своите дела и постапки. „Еден милион порано беше едноставно „многу“ за учениците. Сега има многу поголемо значење“ објасни наставничката. На почетокот учениците користеа математички модели за да ја истражуваат количината како и алатки за решавање на задачите. Со текот на времето тие разложуваа и сложуваа броеви во својата глава.

Многу ситуации кои се употребија во училницата се од природни појави во училиштето и во околината, како купувањето и продавањето на колачиња кои ги направиле девојчињата.
Во оваа средина го разгледуваме размислувањето на седум и осум годишни ученици во второ одделение во групата во која се користи програмата *Математика со размислување*. Ситуацијата која им беше зададена на децата во класот на Г-ѓа Томсон беше да одредат колку деца ќе одат на екскурзија. Имаше три одделенија со 24, 26 и 25 ученици во секој од нив. Во традиционалните училници за второодделенци, учениците не би работеле со овие броеви толку рано во годината, и кога тоа се случува ним им се даваат работни листови на кои единствено има броеви кои треба да се решат со помош на традиционалните постапки за прегрупирање што го вклучува „пренесувањето“. Во одделението на Г-ѓа Томсон, учениците ја решаваа задачата на начини кои им беа удобни. Ќе прикажеме како Г-ѓа Томсон го сврти различното но значајно размислување на учениците во математички симболи, премостувајќи ги нивните начини на размислување до еден поформален систем на математичко запишување.

ОД ТРАДИЦИЈА ДО ПРЕПОЗНАВАЊЕ

Задачата на наставничката беше да ги претвори нивните зборови, слики и модели во симболи кои се совпаѓаат со нивните зборови. Важно е да се забележи дека во некои случаи повеќе од еден начин на запишување би бил прикладен за да ги прикаже мислите на учениците.

Највообичаениот алгоритам за задачата е:

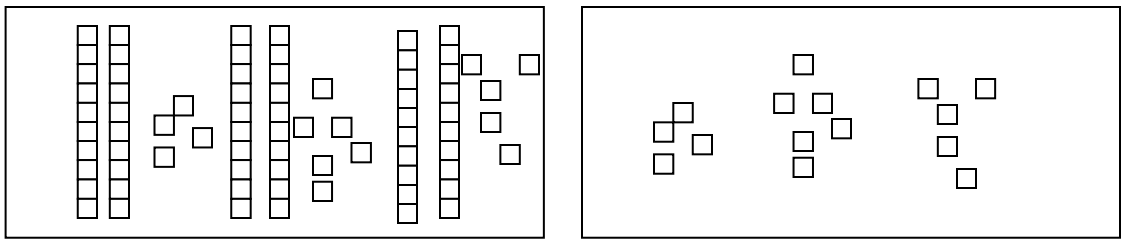
$$\begin{array}{r} 24 \\ 26 \\ \underline{25} \\ 75 \end{array}$$

Учениците кога објаснуваа што направиле најчесто велеа: 4 плус 6 е 10 и 5 е 15; долу пишуваме 6 и 1-цата ја префрлуваме; 1 плус 2 е 3, плус 2 е 5; плус 2 е 7; 75. Запомнете го ова кога ќе разгледаме како го објаснуваат своето мислење учениците на Г-ѓа Томсон.

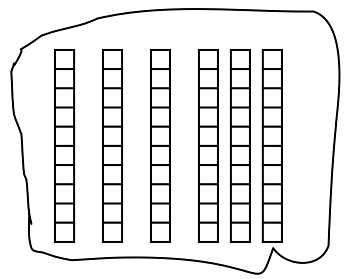
Решение 1
Првото дете ги користи и зборува за неговото употребување на редови од по 10 коцки, материјалот кој го користи. Неговите дела со коцките се прикажани на Приказите 1 до 5, заедно со неговите

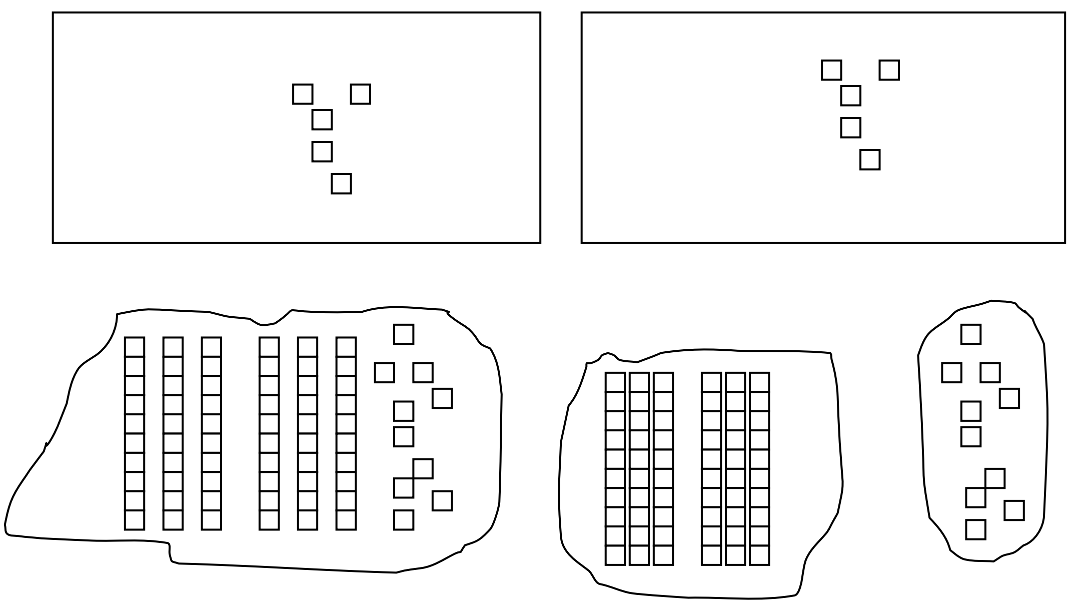
објаснувања. Забележете колку неприкладен е стандардниот алгоритам за размислувањето на ова дете. Наставничката побара од детето да објасни дека 6-те десетки се секој од 6-те редови од по десет коцки и дека тој броел по десет.

Приказ 1. Ученикот претставува одделенија со редови од по десет коцки

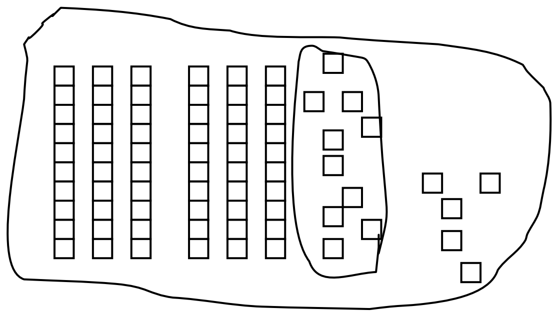


Приказ 2: Ученик: Ги ставив 6-те десетки заедно и добив 60.





Приказ 3: Ученик: Направив уште една 10-ка
Приказ 4: Ученик: - така добив од 4-те коцки и 6-те коцки. . .70



Приказ 5. Ученик: и 5-те коцки и 70 е 75.

Таа го поврза објаснувањето на детето со следнава конструкција:

24 + 25 + 26
10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 = 60
4 + 6 = 10
60 + 10 = 70
70 + 5 = 75

Кога децата не се учат дека мораат да го започнат двоцифреното собирање оддесно, учениците по интуиција започнуваат со најголемиот дел од броевите и изведуваат предно решение (Марковиц и Соудер, 1988, цитирани во Соудер, 1992). Овој метод најчесто доведува до поточни калкулации бидејќи првичниот фокус е на најважниот дел од количината.

Решение 2

Описот на следниот ученик исто така има потреба од наставникот да го транскрибира објаснението. Ова дете научило дел од математичкиот јазик кога наставникот градел мостови меѓу неформалниот и интуитивен јазик и оној на математиката.

Ученик 2: 2 десетки, 2 десетки, 2 десетки се 6 десетки и 6 десетки се 60. И 4, 6 и 5 се 15.

Наставничка: Како го знаеш тоа?

Ученик 2: 4 и 6 се 10 и 5 е 15....Па ја извадив 10-та од 15 и ја додадов на 60. Така тоа е 70 и уште 5 тоа е 75.

Наставничката ова го транскрибираше:
20 + 20 + 20 = 60
4 + 6 + 5 = 15

15 + 60
(15 - 10) + (60 + 10)
70 + 5 = 75

Забележете како детето ги согледува и комбинира 20-ките додека пак првото дете работеше со 10+10. Но, второто дете, прво ги комбинираше сите единици пред да ја извади 10-ката, првото веднаш ја согледа 10-ката и ја додаде на другите десетки.

Решение 3

Интуитивноста без јазик е многу честа кај децата. Третото дете едноставно напиша 75 на својата хартија и ја заокружи. Немаше ништо друго сработено. Кога беше запрашана како доби 75, таа одговори „Едноставно знаев!“

За децата да преминат од својата интуиција до употребливи вештини на кои можат да се потпрат во идни ситуации, тие мораат да можат да разберат и да го артикулираат она што го работат (Силвер, Киркпатрик и Шлесингер, 1990). Повеќе не е соодветно едноставно да се прифати одговорот без да се побара стратегијата или размислувањето. „Точните одговори“ не означуваат концептуално размислување (Геј и Томас, 1993). Затоа наставничката го натера ученикот да проговори за своето размислување. Под притисок, детето на крај даде објаснение.
Ученик 3: Земав еден од 26-ката и ја додадов на 24-ката и така сите беа 25-ки и 3 дваесет и петки се 75.

Иако за овој ученик размислувањето беше транспарентно и требаше да биде лесно воочливо, за другите деца во одделението тоа беше апстрактно. Наставничката одлучи дека е потребна демонстрација со математички модели за другите да можат да видат како сет од броеви може да се разложи и сложи во попријателски броеви. Важен дел од разбирањето е тоа што оригиналната количина мора да се зачува; ништо друго не можеше да се додаде или одземе од оригиналната сума.

Речениците со броеви беа напишани:
26 + 24 + 25
(26 - 1) + (24 + 1) + 25
25 + 25 + 25 = 75

Г-ѓа Т. можеше да покаже како преместувањето на една бројка (или едно дете) од групата од 26 во групата од 24 не ја промени количината на броеви кои се во употреба. Еден едноставно беше преместен во друга група – но сега групите можеа да ги претставуваат три „пријателски броеви“.

Решение 4

Ако се земе во предвид скелето која го нуди наставникот преведувач, учениците се здобиваат со можност самите да го запишат јазикот со симболи.

26
24
<u>25</u>
15
<u>60</u>
75

Ова девојче собираше во вертикални колони, но користеше делумни суми што и овозможуваше да ја има на ум вистинската вредност на броевите, за разлика од традиционалниот алгоритам кој често доведува до фокус на поединечни цифри наместо цели количини. Кога се објаснува традиционалниот алгоритам, децата често велат „Стави ја 5-ката на местото на единиците и пренеси ја (или прегрупирај ја) единицата; додади 1 плус 2 плус 2 плус 2. То е 7. 75“. Забележете го контрастот во чувството за количина во објаснението на детето.

Ученик 4: Додадов 6 плус 4 плус 5 тоа е 15; потоа додадов 20 плус 20 плус 20 и добив 60. И 15 плус 60 е 75.

Решение 5

Друго девојче, откако веќе работеше со коцки од по десет каде десетките и единиците беа јасно визуелни, искористи хоризонтален алгоритам кој го отсликуваше нејзиното преместување на коцките. Таа напиша: 26+24+25. Потоа таа го објасни нејзиниот јазик со симболи и откри дека ги разложи и повторно ги сложи количините.

Ученик 5: Јас собрав 26 и 24. Јас собрав 20 и 20 што е 40. Шест плус 4 е еднакво на 10 плус 40 плус 10 е еднакво на 50. Додека објаснуваше ученичката, наставничката напиша:

26 + 24
20 + 20 = 40
6 + 4 = 10
40 + 10 = 50

Ученик: Тогаш собрав 50 со 25. Педесет и 20 е еднакво на 70 и 5 е 75.
50 + 25
50 + 20 = 70
70 + 5 = 75

ПРИДОБИВКИ

Во ниту еден случај размислувањата на децата не одеа во спротивност на било кој математички принцип, ниту пак размислувањето на наставничката или нејзиното запишување. Во секој од нив, на детето му беше допуштено да ги визуализира целите количини, едно разбирањето кое често им недостига на оние кои имаат потешкотии со традиционалните алгоритми. Учениците исто така беа охрабрувани да се изразат на јазик кој за нив имаше смисла. Целата идеја да им се допушти на учениците да им пријдат на задачите на нетрадиционални начини е тешка за наставниците кои се научени да даваат формули и кои бараат учење на памет на истите како една непроменлива основа. Потребно е време и може да дојде до мала непријатност кога ќе се прави транзицијата. Дури и кога наставниците за прв пат навистина ќе се обидат да го разберат размислувањето на децата, тие често се враќаат кон запишувањето на традиционалните начини без самите да бидат свесни за тоа, бидејќи идејата за еден правилен начин е толку втемелена во нивното образование. Но со време, оваа тенденција се надминува.

Г-ѓа Томсон ја опишува и потребата и развојот на постапката на премостување на размислувањето на децата:

Невозможно е за наставниците да знаат од каде доаѓа детето. Не можеме да се сетиме како беше кога ние бевме вклучени во процесот на учење на нешто ново–кога ние не го знаевме или пак целосно не го разбиравме. Интересното нешто потекнува од тоа кога ги гледаме и слушаме толку често и гледаме како се изразуваат регуларните модели на размислување. За малку се чувствувам како да можам да им ги читам мислите. (Тогаш) морам да се обидам да ги поврзам тие поединечни гледни точки со концепти, јазик, методи кои имаат смисла за детето и за другите деца.

Често, Г-ѓа Томсон комбинира друг јазик заедно со оној кој го користи ученикот, како на пример: „Значи земаш 1 од 26 (26 минус 1 е 25) и ѝ го даваш на 24-ката (24 плус 1 е 25), значи сега и обете се 25? (*вербализирање на принципот на компензација*)[2] или, „Каде виде 20 плус 20?“ – „И двете имаат 2 десетки.„ – „Значи 2 десетки се 20 и 2 десетки плус 2 десетки плус 2 десетки е исто што и 20 + 20 + 20 ? (*појаснувајќи ги дадените вредности, количината и поврзаноста при запишување).* На овој начин се одржува поврзаноста со ученикот кој говори и истите се видливи за оние кои слушаат.

Претходната задача многумина би ја согледале како вообичаено рутинска текстуална задача, иако и самите би признале дека не е рутинска за почетокот на второ одделение. Често, едноставните почетоци се разгрануваат во други прашања и области за истражување во часовите кои ја следат *Математика со размислување* програмата. Всушност, начинот на предавање во пониските одделение може се уште да се типизира според едно писмо до уредникот кое се појави во Вашингтон Пост во ноември 1993 година. Овој татко беше толку разлутен од можноста на неговата ќерка да ѝ досади математиката поради што би добила ниски оценки. Тој напиша:
Уште од градинка, мојата ќерка секогаш беше една или две години понапред од наставната програма. Пред еден месец, таа најде еден каталог за играчки и собра 20 артикли со сума од $ 375,67. Ја замолив да ја намали цената на под $ 100, и таа успешно ги одзема артиклите. Следниот ден, нејзината „предизвикувачка“ задача за второ одделение запраша: „Ако Џои има 12 нешта и сега има 6 колку изгубил?“

Додека образовната заедница се справува со тешката задача да се промени како најголемиот дел од наставниците, особено оние во основните училишта, ја разбираат и ја предаваат математиката, примери како одделението на Г-ѓа Томсон служат како илустрација за другите. Употребата дури и на едноставни ситуации можат да доведат до дискусии за важните математички концепти и да разоткријат едно шаренило од размислувања. Штом наставниците и учениците ќе започнат да се чувствуваат доволно удобно при разгледувањето на задачите од повеќе агли и начини на размислување, тие ќе можат удобно да се справат со потешки и потешки и сложени задачи. Да се натераат истите да разберат дека исто така постои и едно богатство во многу едноставните

---

[2] Наставничката можеше да одбере да го потцрта асоцијативното својство кога поинаку би рекла, „Мислеше на 26 како на 25 плус 1?“ и да запише (25 + 1) + 24 и потоа 25 + (1 + 24). Исто така можеше да ја запише истата мисла вака:

26 + 24 + 25
25 + 25 + 25

Нејзината одлука се засноваше на нејзиното согледување во тој момент со ученик чии потреби ги знаеше.

нешта е многу важен чекор од транзицијата. Исто така пречесто се претпоставува дека на наставниците единствено треба да им се дадат богати активности и автоматски ќе следи процесот на помагање на учениците да ги изработат во математички идеи. За оние кои имаат богато математичко искуство, ова можеби е точно. За другите, ова не мора да значи бидејќи тие самите прават големи умствени отскоци и го очекуваат истото од другите, без да знаат многу за тоа како тече мислењето на учениците. Целата идеја да им се допушти на учениците да им пријдат на задачите на нетрадиционални начини е тешка за наставниците кои се навикнати на улогата на даватели на знаење. Затоа *Математика со размислување* се фокусира на првичното внимание на задачите кои имаат позната рамка за учениците но кои можат да служат како основа за проширување кога наставниците ќе ја направат транзицијата.

Постојат многу начини преку кои луѓето можат да им пријдат на задачите. Исто како што говорителите на вербалниот јазик имаат природни дијалекти во различни делови од одредена држава, така постојат и дијалектички начини на размислување за математиката; некои луѓе би сакале да работат од една целина кон деловите, некои пак од деловите кон целината, некои со пријателски броеви и некои на кои „точниот алгоритам“ им е втемелен во главата умствено пренесуваат броеви во главата. Задачата на наставникот е да ги преведе овие дијалекти на јазикот на математиката на таков начин на кој сите ќе можат да зборуваат и да разберат. Со време децата ќе можат да напреднат од јазикот поврзан со материјалите кои ги користат кон јазикот поврзан со сликите на предмети, кон јазикот *за* самите броеви, и конечно кон јазикот на броеви и симболи.

Кога ќе ги разберат концептите и ќе можат да го опишат и оправдаат она што го напишале, тие ќе можат да се справат со формалниот математички симболизам со голема леснотија и разбирање. Овој постапен процес во кој учениците продолжуваат да работат на различните етапи во различни времиња и со различни задачи го овозможува развојот на вистинската математичка моќ. Тие го отсликуваат растот и ги употребуваат Нивоата на математичко знаење на Ресник и Грино (1992), според кои дури и на инженерите понекогаш им е попогодно да мислат на не нумеричко ниво и да влегуваат и излегуваат од нивоата како што ќе наложува задачата. Математиката не се состои од правила и формули кои ве оставаат парализирани ако заборавите едно од нив. Таа е разбирање како бројките (или геометриските фигури, итн...) се состојат и се конструираат како и ефектите од операциите; ако се заборави одредена формула, може да се реконструира процесот (НСПМ, 1989). Изли и Тејлор (1990) при разгледувањето на разликите меѓу предавањето во Јапонија и во САД увидоа:

Решавањето на математичките задачи може да се согледа како експресивен серијал на дијалози за просторот, обликот, количината и времето. Само затоа што се има високо организирана и извонредно систематизирана наставна програма не е замена за откривањето на атрибутите кои го промовираат размислувањето и можностите од кои можат да изберат наставниците.

Математика со размислување го препознава ова во својот поглед на професионалниот развој на наставниците. Единствено кога наставниците можат да создадат, разберат и знаат како да ги прилагодат лекциите или активностите, тогаш ќе можат најефективно да предаваат. Затоа ова не е пристап кој се води според одреден рецепт. Овој пристап има корени во и е потпомогнат од едно разбирање за тоа како децата најдобро учат математика и основите кои им се потребни на наставниците за да им помогнат да ги разберат количините, операциите, решавањето на задачите и местото на математиката во светот околу нив. Самата наставна програма не содржи начини да им се овозможи на учениците да го разберат и да учествуваат во дијалогот кој го појаснува нивното размислување не само за нас, туку и во нивните глави. Ако навистина се надградуваме на она што децата го допринесуваат во процесот, тогаш мора да постои флексибилноста која не ја нудат „готвачите". Наставниците мораат да разберат каде се вклопуваат активностите, без разлика колку и да се прекрасни во шемата на математиката и како тие можат да сместат еден опсег од нивоа на постигнувања во рамките на едно одделение.

Кога ќе се случи ова разбирање, наставниците ќе увидат дека тие се навистина наставници во една земја на чудеса, освежени од неочекуваното, зачудени од моќта која можат да ја ослободат, славејќи го умот меѓу своите ученици чиешто мислење веќе го надминува нивното. Писма и барања за копии можете да испратите до Alice J. Gill, American Federation of Teachers, 555 New Jersey Ave., NW. Washington. D.C. 20001-2079

РЕФЕРЕНЦИ

Bodenhausen, Judith, Denhart, Nancy, Gill, Alice, Kaduce, Margaret, & Miller, Marcy. (1992). *Thinking mathematics, Volume 1: Foundations.* Washington, DC: American Federation of Teachers.

Briars, Diane J., & Thompson, Alba G. (1990). Assessing students' learning to inform teaching: The message in NCTM's Evaluation Standards. *Arithmetic Teacher, 37(4),* 22-26.

Carpenter, Thomas P. (1986). Conceptual knowledge as a foundation for procedural knowledge: Implications from research on the initial learning of arithmetic. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics (pp.* 113-132). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Carpenter, Thomas P., Hiebert, James, & Moser, James M. (198 1). Problem structure and first grade children's initial solution processes for simple addition and subtraction problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 12(l),* 27-39.

Charles, Randall L, & Lester, Frank K. (1984). An evaluation of a process-oriented instructional program in mathematical problem-solving in Grades 5 and 7. *Journal for Research in Mathematics Education, 15(l),* 15-34.

Cobb, Paul, & Merkel, Graceann. (1989). Thinking strategies: Teaching arithmetic through problem solving. In P. Trafton & A. P. Schulte (Eds.), *New directions for elementary school mathematics, NCTM 1989 yearbook (pp.* 70- 8 1). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Cobb, Paul, Yackel, Erna, & Wood, Terry. (1988). Curriculum and teacher development: Psychological and anthropological perspectives. In E. Fennema, T.P. Carpenter, & S.J. Lamon (Eds.), *Integrating research on teaching and learning mathematics (pp.* 92-130). Madison: Wisconsin Center for Education Research.

DeCorte, Erik, & Verschaffel, Lieven. (1987). The effect of semantic structure on first graders' strategies for solving addition and subtraction word problems. *Journal for Research in Mathematics Education,* 18(5), 363-38 1.

Easley, Jack, & Taylor, Harold. (1990). Conceptual splatter in peer dialogues in selected Japanese and U.S. first grade mathematics classes. In L. Steffe & T. Wood (Eds.), *Transforming children's mathematics education: International perspectives (pp.* 216-226). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Fuson, Karen C. (1992). *Children's counting and concepts of number.* New York: Springer-Verlag.

Fuson, Karen C., Stigler, James W., & Bartsch, Karen. (1988). Grade placement of addition and subtraction topics in Japan, Mainland China, the Soviet Union, Taiwan, and the United States. *Journal for Research in Mathematics Education, 19,* 449-456.

Gay, Susan, & Thomas, Margaret. (1993). Just because they got it right, does it mean they know it? *Assessment in the Mathematics Classroom.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Good, Thomas L., Grouws, Douglas A., & Ebmeier, H. (1983). *Active mathematics teaching.* New York: Longman.

Lampert, Magdalene. (1986). Knowing, doing, and teaching multiplication. *Cognition and Instruction, 3,* 305-342.

Lampert, Magdalene. (1992). On teaching. In R. Glaser (Ed.), *Advances in instructional psychology* (Vol. 4), Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Leinhardt, Gaea. (1987). Development of an expert explanation: An analysis of a sequence of subtraction lessons. *Cognition and Instruction, 4,* 225-282.

Leinhardt, Gaea, Hattrup, Rosemary, & Putnam, Thomas. (Eds.). (1992). *Analysis of arithmetic for mathematics teaching.* Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Lo, Jane-Jane, Wheatley, Grayson, & Smith, Adele C. (199 1, April). *Learning to talk mathematics.* Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, Chicago, IL.

Miller, Ruth. (199 1). *Testing for learning: How new approaches to evaluation can improve American schools.* New York: The Free Press.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum & evaluation standards.* Reston, VA: Author.

National Council of Teachers of Mathematics. (199 1). *Professional teaching standards for mathemat*ics. Reston, VA: Author.
Nunes, Terezinha, Schliemann, Analucia D., & Carraher, David W. (1993). *Street mathematics and school mathematics: Learning in doing: Social, cognitive, and computational perspectives.* New York: Cambridge University Press.

Putnam, Thomas, Lampert, Magdalene, & Peterson, Penelope L. (1990). Alternate perspectives on knowing mathematics in elementary schools. In C. Cazden (Ed.), *Review of research in education: Vol. 16.* Washington, DC: American Educational Research Association.

Resnick, Lauren B. (1986). The development of mathematical intuition. In M. Perlmutter (Ed.), *Perspectives on intellectual development: The Minnesota Symposium on Child Psychology*19, pp. 159-194). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Resnick, Lauren B., Bill, Victoria, & Lesgold, Sharon. (1992). Developing thinking abilities in arithmetic class. In A. Demetriou, M. Shayer, & A. Efkides (Eds.), *The modern theories of cognitive development to go to school.* London: Routledge.

Resnick, Lauren B., & Greeno, James. (1992). From protoquantities to operators. In G. Leinhardt, .R Putnam, & R. Hattrup (Eds.), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching (pp.* 373–429). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Resnick, Lauren B., & Omanson, Susan. (1987). Learning to understand arithmetic. In R. Glaser (Ed.), *Advances in instructional psychology (Vol.* 3, pp. 41-95). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Riley, Mary S., Greeno, James G., & Heller, Joan 1. (1983). Development of children's problem solving ability in arithmetic. In H.P. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking (pp.* 153-196). New York: Academic

Silver, Edward A., Kirkpatrick, Jeremy, & Schlesinger, B. (1990). *Thinking through mathematics: Fostering inquiry and communication in mathematics classrooms.* New York: College En trance Examination Board.

Sowder, Judith. (1992). Making sense of numbers in school mathematics. In G. Leinhardt, R. Putnam, & R. Hattrup (Eds.), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching (p.* 14). Hillsdale NJ: Erlbaum.

Stenmark, Jean K., Thompson, Virginia, & Cossey, Ruth. (1986). *Family math.* Berkeley: Lawrence Hall of Science, University of California.

Suydam, Marilyn N., & Higgins, Jon L. (1977). *Activity-based learning in elementary school mathematics: Recommendations from research.* Columbus, OH: ERIC Center for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Wheatley, Grayson H. (1983-1984, December-January). Problem solving makes math scores soar. *Educational Leadership, pp.* 52-53.

ЈАЗИК И РАЗГОВОР

Објаснувањето дека учениците промислуваат додека зборуваат, е доказ за природата и опфатот на нивното сфаќање. На сличен начин, појаснувањата на наставниците го откриваат она што и самите тие го сфаќаат и го истакнуваат во одредената тема.

Геа Лајнхарт (Gaea Leinhardt)[132]

Јазикот го сфаќаме и како пречка и како помагач во изучување на математиката. Го сметаме за пречка за оние ученици кои слабо читаат и за оние кои го изучуваат англискиот јазик, во случаи кога има зборовни проблеми. Јазикот исто така е сметан за пречка во случаи кога оценувањето создава проблеми заради користење зборови што не им се познати на учениците. Од друга страна, јазикот помага во случаи кога појаснувањата и примерите се едноставни и јасни, кога наставниците ги поттикнуваат учениците да користат сопствени зборови и кога им помагаат да ги поврзат со јазикот на математиката кога е тоа соодветно, и кога јазикот им помага на луѓето прецизно да го објаснат тоа што го мислат. Јазикот исто така пома-га во случаите кога учениците се при-морани да размислуваат и да искажат нешто што направиле, зошто нештото било или не било така како што е. Во последниот случај, јазикот им помага на учениците да развијат метаспознание за сопствениот начин на размислување. Кога учениците објаснуваат, наставниците откриваат можни празнини во знаењето или погрешно сфаќање, за да бидат во состојба подобро да ги конципираат лекциите во иднина.

УТВРДУВАЊЕ НА УСЛОВИТЕ НА РАЗГОВОРОТ

Разговорот во наставата по математика не го вклучува само јазикот на зборовите, туку и јазикот на претставите и симболите. Атмосферата во која учениците и наставникот го користат говорот за време на наставата, многу придонесува за тоа како учениците ја сфаќаат суштината на математиката и што ќе научат.

Како тече разговорот? Дали ќе доминира говорот на наставникот? Дали разговорот ќе биде само во насока наставник прашува – ученик одговара? Дали главната поента на разговорот ќе бидат одговорите, или концепти и стратегија? Дали математиката е нешто што се меморира и репродуцира, или има мноштво насоки што треба да се истражат и разберат? Што со наизменичните решенија? Ќе бидат ли дозволени? Како ќе бидат воведени термините и дефинициите? Дали само ќе бидат зададени или ќе произлезат од концептите што претходно биле развиени и сфатени? Како ќе биде вметнат јазикот што учениците го разбираат, за да го разберат значењето на формалните термини? Кога ќе настане ваквата промена?

[132] Leinhardt, Gaea (1989). Појаснување за појаснувањата во учењето. Национален центар за истражување на учењето кај учениците, Универзитет Питсбург.

Дали ќе се прифати секое појаснување на ученикот? Како наставникот ќе им помогне на учениците да бидат подобри во објаснувањето?

Бал (Ball) забележува:

> *Одлуката што да биде именувано, кога да биде именувано, и како да се појасни тоа што се именува, е битна компонента на математичкото чувство и е главна разлика при формирање на математичкото знаење.* [133]

Наставниците имаат голема одговорност да го насочат објаснувањето на ученикот и дискусијата на час. Во нејзината студија за тоа како стручните наставници го користат разговорот при градење на знаењето, Лајнхарт наведува три битни задачи.[134] Наставниците кои поттикнале добри дискусии, ги охрабриле своите ученици да ги:

- Предизвикаат оние идеи што изгледале неизводливи
- Разработат идеите што биле непотполни, и
- Сврзат идеите што се слични.
- Во суштина, тие ги поттикнуваат учениците на критички осврт кон содржината што им се нуди, процес кој им помага да размислуваат за сопствената работа и за нивниот пристап кон проблемите. Таквото мета-спознание за тоа зошто нешто правиме или зошто е тоа исправно решение, им помага да го пренесат знаењето на различни или посложени ситуации. Многу важно во ваквото сценарио е наставникот внимателно да го слуша она што ученикот го говори. Наместо да ги “преведе” зборовите на ученикот во сопствените мисли, наставникот треба да утврди “дали сакаш да го кажеш ова или мислеше нешто друго?” Не е невообичаено, на пример, да се претпостави дека ученикот сака “смена”, иако можеби таквата мисла воопшто не му дошла на памет.

Без оглед на формата на појаснувањето, вели Лајнхарт, “сите треба да го сфатат прашањето што се разгледува, што е потребно како доказ или објаснување, и како одредените примери, аналогии и активности се однесуваат меѓусебно.” Појаснувањето исто така треба да е едноставно, за сите ученици да може да го сфатат.

ВОДЕЊЕ ЗАПИС

Проверка на решенијата е едно од средствата што им помага на учениците да ги поврзат концептите и вештините. Друг делотворен начин да се потврди поврзаноста на идеите, е преку јавна дискусија што се

---

[133] Ball and Bass. Making Mathematics Reasonable in School

[134] G. Leinhardt (1995). How expert teachers use discourse to build understanding. Во *Learning 1995*. LRDC

запишува.[135] Слушањето на ваквите излагања има двојна функција, и корист и одговорност точно да се запише тоа што ученикот го кажува. Еднаш запишана, идејата повторно се дискутира, пречистува, доразвива, отфрла, прифаќа, споредува со други идеи, или се третира на друг некој соодветен начин. Основните идеи може да се надградуваат или извлечат, поврзат или пресликаат. Лајнхарт го спомнува воспоставувањето правила за “разгледување, побивање и надградување” на запишаните идеи. За да им помогнеме на учениците да ги бранат сопствените идеи, вели таа, наставниците треба да употребуваат, и да ги охрабруваат и самите ученици, зборовите “затоа што” и “заради.”

ЈАЗИКОТ НА СИМБОЛИТЕ ДА ЈА ОТСЛИКУВА МИСЛАТА НА УЧЕНИКОТ

Јавната дискусија што се запишува, најчесто се случува откако учениците ја сработиле задачата. Да претпоставиме дека учениците треба да користат наставни помагала за да решат задача во која треба да се соберат 7 и 5. Наставникот треба да се движи наоколу и да гледа што прават учениците кога го користат работниот простор самостојно, за да ја решат задачата. Ова му овозможува на наставникот да ги издвои учениците за понатамошен разглед, и да одлучи кои решенија најпрво ќе бидат побарани. На пример:

<u>Метода 1</u>: Ако ученикот стави 7 џамии во едниот дел, а потоа извади 4, тогаш користи одземање. Кога ученикот ќе појасни што направил, можеби ќе рече “Имав 7 џамлии и сите 7 ги ставив во обележаниот дел. Потоа Семи му даде 4 џамлии на Двејн, па затоа извадив 4 од делот и ги ставив настрана. Записот за ова би бил 7 – 4.

<u>Метода 2</u>: Ако ученикот стави 4 џамлии на една страна, а потоа додава по една сè додека не станат 7, тогаш користи броење со собирок што се додава. Овој ученик може да го каже следново, “Семи му даде 4 џамлии на Двејн, затоа јас ги ставав неговите џамлии во едниот дел и броев до 7 за да видам колку му останале на Сем.” Овој ученик не одзема, туку додава, а нумеричкиот запис треба да покаже додавање.4 + ? = 7.

<u>Метода 3:</u> Ако ученикот стави 4 џамлии на една страна, а 3 на друга, (без да брои до 7), можеби тој мисли 7= 4+3 зашто го знае основниот факт. Но наставникот треба да запраша како знаел дека треба да ги запише 3 и 4, за секој случај. Ако ученикот одговори “Знам дека 7 е еднакво на 4 и 3”, седмицата треба да стои на почеток на равенката.

Додавањето и одземањето се **спротивни** операции. Едното го поништува другото. Концептот на спротивност е многу запазен во Јапонија.[136] И додека многу учебници во САД пишуваат за “фактичките семејства”, тие сепак не се фокусираат на концептот на спротивните својства што

---

[135] G. Leinhardt (1995). Презентација на ER&D Winter Institute во главниот град Вашингтон.

[136] Јапонско друштво за математичко образование (Japan Society of Mathematical Education), 1995.

подоцна може да бидат употребени во множење, делење и **во рефлексивното својство**.

Принцип 5: Барајте од учениците да ја објаснат и да ја оправдаат нивната математичка мисла

Многу ученици не се обидуваат да објаснат, зашто не се сигурни што наставникот сака да чуе. Да се задоволи наставникот постанува главна цел и се мисли дека треба да се одговори со оние зборови што наставникот ги дава, или едноставно да се даде точен одговор. Со ова ученикот се ослободува од потребата да размислува. Сепак, учениците не престануваат своеволно да размислуваат со сопствена глава. Го прават тоа кога наставникот инсистира на строги начини за давање идеиако воопшто побараат објаснување, ако не проверат дали ученикот го разбира тоа што го зборува, ако не се заинтересирани за начинот на кој ученикот дошол до одредениот одговор, или ако инсистираат на употреба исклучиво на методата на наставникот, и не бараат од ученикот да го каже тоа што го мисли.

ДОКАЖУВАЊЕ

Не само што објаснувањето им помага на учениците да ги изразат сопствените идеи и со тоа подобро да научат, ами заклучокот и формалното објаснување се неделиви сегменти на математиката како дисциплина

Заклучокот на објаснувањето во математиката лежи врз две основи. Едната е општо-прифатеното знаење. Другата е јазикот, што се состои од симболи, изрази, и други претстави и нивни дефиниции. [137]

> *Дефинициите не се само искажани наслови што треба да се меморираат. Тие се посеани концепти, зачнати, и се развиваат по пат на активно испитување и рефлекција, и кога ќе созреат, се раѓаат од потребата да се покрсти некоја богата или важна идеја, што бара едноставно упатување.*

Хајман Бас (Hyman Bass), поранешен претседател

Одбор за образование по математички науки

Бас забележува дека користиме критериуми што ги зачувуваат одредените модели на математичката регуларност. Идејата на користење на математичките модели во објаснување на заклучокот или на одговорт е илустрирана подолу.

---

[137] Бал (Ball) и Бас (Bass), 2003, Разбирлива математика во училиштата, објавена во *Research Companion to NCTM Principles & Standards for School Mathematics*

Одредени математички модели се-когаш се употребливи. Еден таков е моделот на тројки од броеви. Без оглед на броевите, кога двата собироци даваат одреден збир, (a+b=c), одземањето на кој било собирок од збирот го дава другиот собирок (c-a=b; c-b=a). На овој начин, дури и најмалите ученици кои сѐуште не го научиле одземањето со повеќецифрени броеви, ако ја разберат оваа релација, треба да заклучат дека

462 – 267 = 195 ако ин се каже дека 267 + 195 = 462.

Друг ваков неменлив модел е структурата на таблиците множење. Ако *n* го претставува множителот или големината на одредена група, секое наредно множење во таблицата го дава поранешниот производ плус *n*. (За одземање ќе биде минус *n*.) Производите од оваа таблица се зголемуваат за 4 ако се оди напред. Ако таблицата се користи наназад, производот се намалува за 4 со секое користење.

4 x 0 = 0	4 x 4 = 16
4 x 1 = 4	4 x 3 = 12
4 x 2 = 8	4 x 2 = 8
4 x 3 = 12	4 x 1 = 4
4 x 4 = 16	4 x 0 = 0
4 x -1 =-4	4 x –2 =-8

Проширување на моделот на таблицата наназад, може да се искористи за да се објасни дека позитивниот број помножен со негативен број дава негативен производ.

Овој модел може да се искористи и за докажување на бројна оска, таблица или листа. Користењето на ваквите константи од математиката, за да објасниме одреден израз, го прејудицира формалниот доказ.

Бал илустрира како да се натераат децата да користат повеќе математички изрази за да го поткрепи нивниот заклучок. За време на нејзината работа со деца од второ одделение, ги запрашала да состават нумерички изрази за бројот 10.

Еден ученик рекол: 1+1+1+1+1+1+1+3=10.

Кога го запрашала како знае дека тоа е 10, ученикот само ја прочитал повторно нејзината реченица. “Не ми ја препрочитувај реченицата, настојувала Бал. “Како знаеш дека тоа е еднакво на 10?“

Ученикот повторно почнал. “Значи, 1 плус 1 е 2, плус 1 прави 3, плус 1 прави 4, плус 1 е пет, плус 1 е шест, и плус 1 е седум. Па осум, девет, десет.” Секој чекор во неговото размис-лување се базирал врз претходниот чекор, што го одразува начинот на кој логиката и доказот се градат. Секој ученик ќе може да продолжи. Малите деца можат да објаснат со користење на изрази како"кога ќе додадеме еден на некој број, тогаш следниот број се додава." Кога одземаме еден, тоа може да се објасни како бројот што претходи, концепт што е поврзан со идејата на Фоснот за "хиерархиска вклученост."

Исто така, при користење на јазикот на математичките симболи, постојат правила на логиката и на синтаксата. Децата на кои им е дадена отворената реченица 5+ ? = 2 + 6, честопати не разбираат дека тука има две еднакви количества, една на левата а друго на десната страна од знакот за еднаквост. Сфаќањето на знакот за еднаквост е најважно во работа со формалната алгебра. Како што учениците треба да решаваат задачи со непознати што не се дадени низ моделите $a+b=c$ или $c-a=b$, настав-ниците треба постојано да бараат објаснувања со кои ќе се разјасни природата на изразот во кој се појавува знакот за еднаквост.

ПРАШАЊА КАКО ПОТТИК ЗА РАЗМИСЛУВАЊЕ

Инсистирање на математички идеи

Кога учениците се среќаваат со основните факти на собирањето и одземањето низ ситуации дадени во задачи, можат да видат како двата дела може да се спојат заедно во еден и како целината може да биде разделена на делови.[138] Со ова им помагаме на децата да ја разберат инверзивната (спротивната) релација на собирањето и од-земањето. Следниов пример илустрира како основната комбинација 3+4 може да се воведе преку користење претстави и прашања од наставникот, за да се истакне овој концепт. Наставникот го дискутира проблемот во задачата со учениците, и му остава на класот да продискутира како да го реши.

Колку џамлии ќе има Џон ако Кејша му даде 3, а Тим му даде 4 џамлии? Примери на можните одговори од учениците за тоа како да се реши оваа задача:

- Да се покажат џамлиите
- Броење
- Собирање

Наставникот ги прашува учениците што би собрале. (Тие одговараат, "3 џамлии и 4 џамлии.") Наставникот на таблата запишува 3 џамлии и 4 џамлии, без знаци. Прашува кој знак треба да се употреби. Ова треба да ја поттикне потребата за знакот плус. Наставникот го вметнува знакот плус во изразот, со што им наговестува на учениците дека знакот плус е соодветен кога нештата се собираат заедно. Ова им го фокусира вниманието на децата врз значењето на знакот за собирање. Симболите се запишуваат на секој чекор од размислувањето. Користење на измена или комбинација во задачата, за да се претставaт два броја како збир и разлика од трет број, овозможува ставање на фокусот врз едно битно својство: собирањето е комутативно – промената на местата на

[138] Резник (Resnick), 1989

собироците не е важна. Ниту пак, како во овој случај, се менува значењето на задачата.

Н: *Ќе замислиме дека нашите топчиња се џамлиите на Џон. Дали тој има само три џамлии или повеќе?*

У: *Повеќе.*

Н: *Во тој случај, со вашите топчиња покажете ми три џамлии во едниот означен дел од површината.*

(*Учениците го прават тоа. Наставникот шета наоколу и проверува, и потоа го покажува на проектор. Не е важно кој дел од површината ја користат децата. Наставникот може да праша, "дали има врска во кој дел ги ставив? " Ако некое дете рече дека има, наставникот може да го замоли детето да ги намести џамлиите во другиот дел, за да открие дали има врска.)*

Н: *Колку џамлии остануваат?*

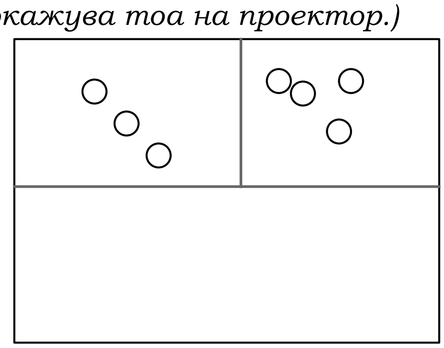
У: *Четири.*

Н: *Дали ова се сите џамлии што Џон ги има, или само дел од нив?*

У: *Само дел од нив.*

Н: *Тогаш, покажи ми каде се преостанатите четири џамлии на површината.*

(*Учениците го прават ова, и наставникот повторно проверува и го покажува тоа на проектор.)*



Н: *Како ќе дознаеме колку џамлии има Џон?*

У. *Да ги ставиме заедно.*

Н. *Во ред. Да ги ставиме сите џамлии во целиот дел. Колку е 3+4?*

У: *7 џамлии.*

Наставникот го прашува ученикот како знае дека е тоа така, и извлекува онолку начини да се дојде до заклучокот колку што ученикот дава. Некои од нив би биле:

- Собирање на сите (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)
- Броење (4→ 5, 6, 7 ….или.. 3→4, 5,6,7), или
- Отповикување (сеќавање) на основниот факт.

Ако некој ги замени броевите и ако додаде 3+4 наместо 4+3, наставникот треба да им помогне на учениците да увидат дека одговорот е ист. Кога собираме, не е битно кој број оди прв.

Кон инверзијата

По разговорот за собирање, наставникот може да се користи со моделот претставување на два броја како збир и разлика од трет број, за да покаже дека она што се става заедно може повторно да се раздроби, преку поставување уште едно прашање што води до растурање на множеството џамлии. Кога во задачите има и одземање и собирање, тоа помага да се истакне врската помеѓу броевите во тројствата на собирање, и ја покажува инверзната врска помеѓу собирањето и одземањето.

> **Сега Џон има 7 џамлии. Тим сака да ги добие назад неговите 4 џамлии. Ако Џон му ги врати 4те џамлии на Тим, колку му остануваат на Џон?**

Наставникот повторно ги остава учениците да разговараат што е тоа што треба да го решат во задачата, и го поттикнува решението. Откако учениците ќе ги идентификуваат 7 и 4 како броевите што им требаат за да откријат колку џамлии ќе му останат на Џон, наставникот ги запишува овие броеви на табла, повторно без знакот минус. Некои ученици можеби ќе одлучат да го решат ова со собирање, мислејќи "4 плус колку прават 7?" Во овој случај, наставникот ги води да стават 4 "џамлии" во едниот дел од масата, а на другиот онолку колку што треба, за да се дојде до бројот 7. За *оваа* равенка, наставникот ќе покаже 4+?=7. (Со ова се пресликува размислувањето на ученикот за 4 како почетен број.) После ова, наставникот поттикнува и други решенија сѐ додека некој не предложи одземање. Наставникот потсетува дека почнале со седумте џамлии на Џон и дека Тим одзел четири. Бидејќи 7 е бројот на сите џамлии во задачата, ставаат 7 топчиња во делот наречен "цело." Потоа, го одвојуваат во другиот дел она што Тим го одзел. Другиот дел е она што му останува на Џон. Тие припаѓаат во другиот дел.

Н: *Дали Џон има седум џамлии или седум е само дел од џамлиите што тој ги има?*

У: *Има вкупно седум.*

Н: *Ако има вкупно седум, ако тоа е збирот, дали ќе го прикажеш тоа во поединечните делови или во делото означен како цело?*

У: *Во делот означен како цело.*

Н: *(Пишува 7 на табла) Така, еве ги сите џамлиии тука. Што друго се зборува во задачата?*

У: *Тим ги зел назад неговите џамлии.*

Н: *Колку зел?*

У: *Четири*

Н: *Што ќе правиме сега?*

У: *Ќе одземеме четири.*

Н: *Како да го запишеме тоа? Еве ги оние на Џон (покажува на 7-цата на табла), а како ќе ги прикажеме оние што Тим ги одзел?*

У: *Извадете 4.*

Н: *Добро. Ќе напишеме минус 4. (пишува). Ајде сега да ги запишеме овие четири - што Тим ги зел – во еден од деловите.*

Н: *Што сега? Дали знаеме колку џамлии сега има Џон?*

У: *Три..*

Н: *Како знаеш?*

У: *Толку остануваат.*

Н: *Дали остануваат само уште три?*

У: *Не. Тим има уште.*

Н: *Каде се џамлиите на Тим?*

У: *Во еден од другите делови.*

Н: *Тогаш, каде мислиш дека треба да ги запишеме џамлиите на Џон?*

У: *Во другиот дел.*

Н: *Те молам запиши ги. Стави ги џамлиите на Џон во другиот дел. Добро, кој сега сака да го заврши нумеричкиот израз?*

У: *Три.*

Н: *Кажуваш дека 7 минус 4 е 3?*

У: *Да.*

Н: *Ајде сите да го запишеме ова и да ја завршиме нашата равенка.*

Ја завршува равенката со 7-4=3

Настојување на мета-спознание

Додека трае лекцијата, наставникот открива како учениците доаѓаат до одговорите. Како знаат дека седум минус три е четири? Можат ли да нè убедат? Ако детето се служи со стратегијата на собирање опишана порано, зошто и во овој случај решението е исправно? Како децата знаат дека три плус четири е седум? Пораката што наставникот ја праќа е дека одговорот не е доволен. Мора да се знае како е дојдено до тој одговор, и што претставуваат сите броеви и симболи. Ова им помага на учениците да станат свесни за сопственото размислување, ако веќе не се. За решавање на оваа задача, учениците може да:

- Одбројуваат;
- Бројат до одговорот, или
- Да ја знаат таа нумеричка комбинација.

Важно е од секој ученик да побараме усмено да го повтори и потврди сопствениот одговор. Децата кои ги запомниле (мемораале) “основните факти” може да бидат прашани да ги измоделираат со предмети или со илустрација, “за да им покажат на другите како дошле до решението” и со тоа да почне постапката на неформална потврда на она што го знаат. Од најрана возраст, кога учениците го прават ова, служат за пример како да се воведат помалку напредните деца кон поефикасни постапки на броење.

Поттикнување на размислувањето кај учениците, преку прашања

Во нејзината студија за она што им е потребно на наставниците и како им е потребно да го дознаат тоа за да дадат делотворна настава, Бал(Ball)[139] ја дава следнава поента за тоа како различни професионалци ја користат математиката:

И додека останатите гледаат да го компресираат тоа што го прават, наставниците мора да ја рашират математиката. Работа на наставникот е да ја најде соодветната мерка за изразите и реченците, и да ги одбере вистинските прашања, за оние кои ќе учат, да може да ја разберат математиката.

[139] D.Ball, презентација за Извршниот совет на АФТ (AFT Executive Council), мај 2006

Дали разговорот на час ќе им помогне на учениците да добијат подобро и подлабоко познавање, зависи не само од тоа што учениците ќе приднесат во дискусијата, туку во голем дел и од тоа како наставниците ја оркестрираат дискусијата. Многу важно во ова е да се употребуваат прашања што ги поттикнуваат учениците на размислување, на објаснување, да го активираат сопственото знаење и да го поврзат со матема-тичките идеи.

Еве неколку примери на прашања што може да се користат за оваа намена:

1. Дали мислиш дека може да почнеме со..?
2. Може ли да се сетиш на слична задача?
3. Што мислиш дека Меги сакаше да каже?
4. Дали се согласуваш со неа? Објасни зошто да или зошто не се согласуваш.
5. Зошто мислиш дека имат различни мислења? Како ќе решиме кое од нив е точно?
6. Каде мислиш дека е грешката?
7. Како да го најдеме резултатот за n-тиот број?
8. Толку се различни; како можат и двете да бидат точни?
9. Дали ова секогаш ќе биде точно ако се примени?
10. Дали знаеш некој друг начин да го кажеш (напишеш, покажеш..) истото ова?

Со давање внимание на јасните врски помеѓу фактите или идеите, многу помагаме во развојот на концептуалното разбирање. Како и со давање можност на учениците да се справат со важните математички идеи.[140]

Поттикнување на различни видови знаење

Прашањата можат да го поттикнат разбирањето дури и кога се работи за задачи само со броеви. На пример, погледнете ја разликата помеѓу поставените прашања во задача а/ и задача б/.

а/ Решете.

508 - 116

---

140 *Делотворна настава за развивање на ветини и концептуално разбирање на броевите: Што е подобро?* Цитат од Fuson & Briars, Hiebert & Wearne; Good, Grouws & Ebmeier. NCTM.org/news/content.aspx

280 - 116

1.485 - 700

408 + 74

б/ (Усмена вежба) Која разлика или збир е поголем и со колку?[141]

580-116 или 280 - 116

540+80 или 600 + 80

1.485 – 700 или 1.485 - 650

356 +74 или 408 + 74

Со задачата под а/, наставникот ќе дознае дали учениците може да ги пресметаат одговорите, нешто што во секој случај сакаме да го знаат. Сепак, учениците може да одговорат и ако ја знаат само постапката. Со задачата под б/ намерно не се бара одговор. Учениците се тераат на размислување за поврзаноста на проблемот и за ефектот од менување на броевите. При задачи со одземање, учениците исто така се натерани да размислуваат за врската помеѓу големината на намалителот и големината на разликата. Ако одземете повеќе, ќе добиете помалку. Ваквиот вид прашања[142] го пот-тикнува размислувањето на начин на кој, прашањата од типот "колку е 62+38 или 100-74", не го поттикнува.

Не е едноставно да се користи разговорот за поттикнување и обезбедување на бавниот процес на стек-нување на знаењето и на разбирање на врските помеѓу различните идеи. Наставниците треба да ја земат предвид важноста на поставената математичка структура и односите во неа. Премногу често, активностите што се забавни за учениците или кои бараат доста време со наставните помагала или прибирање податоци, стануваат цел за себе; се губат математичките замисли што ги содржат. Ова е една од разликите што Трафтон (Trafton)[143] ги опишува, споредувајќи ги часовите што се насочени кон активности и часовите насочени кон решавање проблеми (задачи). (Види ја Табелата за активности за време на час). Замислата за поединечната одговорност исто така може да биде изгубена, ако наставниците премногу се фокусираат на потребата за заеднички активности; заради ова, предлагаме, на описот што Трафтон го дава, да му се додаде вредноста на поединечниот труд, покрај групната интеракција. Условите на час ги карактеризраме како насочени кон активности, кога во таквиот час површинските одлики заземаат повеќе важност отколку математичките цели.

141 Задача за второ одделение, од преведен руски учебник. CSMP

142 CSMP. Руски учебник за второ одделение

143 Трафтон, 1997.

Табела за активности за време на наставен час

	Насочен кон активности	**Насочен кон решавање на проблем (задача)**
Главни карактеристики	Воден од постапка	Воден од јазикот (размена, дискусија, докажување) по усмен или писмен пат
Поглед кон учењето	Резултати од поединечната активност	Резултати од рефлексиите врз менталните акции и групната интеракција, како и од поединечниот труд **
Погледот од децата	Математички слаб / ограничен	Математички робусен
Квалитетот на активноста се базира врз (или се оценува од)	Колку децата уживаат / се вклучени	Го промовира - ❖ Математичкото размислување ❖ Чувството на одговорност кај ученикот ❖ Правењето конекции
Улога на наставните помагала	Есенцијални за да се случи учењето	Алатки за - ❖ Решавање задачи ❖ Потврдување на решенијата ❖ Градење став кон математиката ❖ Создавање контекст за истражување на математиката

**Од презентацијата на Трафтон на Конференцијата на NCTM од 1997.*

Со одобрение од Пол Трафтон (Paul Trafton)

Добро срочени прашања што се однесуваат на операции

Вежбите како вежбата опишана[144] подолу, им помагаат на учениците да размислуваат околу количествата и резултатите од операциите. Усмените појаснувања ги прават замислите и концептите појасни. За учениците да можат лесно да дојдат до замисли и идеи, треба често да се потсетуваат. Примерите на можните објаснувања се дадени во загради.

Споредете ги следниве збирови без да го пресметате одговорот.

а/ 12+9 и 9+12

425+67 и 76+425
(овде е покажано комутативното својство. Броевите може да ги заменат местата, а збирот останува непроменет).

б/ 124+60 и 124+80

144 Вакви прашања се чести во руските учебници за основно образование.

(вториот збир ќе биде поголем за 20 зашто се почнува со ист број и во двата случаи, но додаваме 20 во вториот случај.)

в/   98+34 и 98+30

(првиот збир ќе биде поголем зашто додадено е 4 на 98)

г/   128+25+75+16 и 25+16+128+75

(двата збира ќе бидат еднакви и нема разлика по кој ред ќе се собираат броевите).

Кој збир или разлика е поголем и за колку?

а/   470-112 и 270-112
(Се одзема истиот број, но 470 е за две 100-ки поголем од 270, затоа ќе останат дополнителни 200.).

б/ 800-234 и 800-214
(се почнува со ист број, но се одзема две десетки помалку во вториот. Така, вториот резултат ќе има 2 десетки или 20 повеќе).

в/ 490+50 и 290+58
(Првиот број има две стотки повеќе, па затоа во збирот ќе има двесте повеќе, но во вториот дел бројот е поголем за 8, кои ќе мора да се одземат од 200 и на тој начин првиот збир ќе биде поголем за 192. Спротивната насока во размислувањето на вториот чекор е ментално доста тешка).

Има други видови прашања што наставниците може да ги поставуваат за време на дискусијата, а со кои се поттикнува сличен начин на размислување. Што се случува со збирот ако првиот број се зголеми за 50, а вториот се намали за 50? За колку треба едниот број во задачата да се смени, за да се намали збирот за 24?

Повратна информација од наставникот и математички разговор

Иако е исклучително важно да се поставуваат прашања за време на изучувањето на концептите и вештините, а со цел поттикнување на математичките идеи, исто толку е важно како наставникот реагира на учениците. Една од целите на вклучување на мислењето на учениците во наставата, е за да ги поттикне да размислуваат и да покаже дека многу начини на размислување се исправни. Со ова се надеваме дека ќе се прошири бројката на ученици кои имаат самодоверба во сопствените способности по математика.

Сепак, за да ја постигнат оваа цел, понекогаш наставниците претеруваат во нивниот ентузијазам во поддржување на секоја идеја како добра и во израмнување на она што треба да е ментална навика за смислување нешта, со решавањето на нештата како последната теорема на Фермат. Многу е истражено за пофалбата, што е дел од почетниот курс за Образовни истражувања и дисеминација (ОИД).

Истражувачот Џер Брофи (Jere Brophy)[145] истакнува дека иако пофалбата има повеќекратна намена ако е правилно искористена, таа има краткорочни ограничувања. Некои наставници практикуваат да го пофалат секој одговор како одличен или феноменален. Учениците знаат кога премногу ги фалите, и со тоа ја намалувате вредноста на заслужената пофалба што ќе ја дадете. Пофалбата е многу поделотворна кога наставниците селективно ја даваат... Ако тие премногу даваат пофалби или ги фалат сите ученици, пофалбата станува двосмислена и безвредна за учениците.

... наставниците треба селективно да даваат пофалби, и да го фалат вистинскиот напредок на ученикот или достигнувањето...Делотворната пофалба од наставникот е конкрет-на, и на ученикот му дава конкретна информација.

Едноставна и навремена повратна информација, што директно се однесува на работата на ученикот е од најголемо значење за учењето, за разлика од пофалбата, и го сакаат и наставниците и учениците. Учениците треба да знаат што е тоа што е добро во нивната работа, а што треба да го доработат. (Види Водич за делотворна и недело-творна пофалба, како и Табела за фидбек, што се наоѓаат во поглавјето за ресурси).

Блек и Вилијам истакнуваат три најважни елементи на фидбекот на следниов начин: “признание за посакуваната цел, доказ за сегаш-ната позиција, и извесно знаење како да се затвори празнината помеѓу двете. Сите три елементи треба до извесен степен да бидат сфатени од сите, пред да се почне било што за да се подобри учењето.”[146] Овие британски истражувачи го сметаат фидбекот за особено корисен кога не дава никаква алузија на оценката.

На учениците им се помага преку моделирање на стратегии (размислување на глас или учење како да се користат алатки за моделирање), менторство; охрабрување при блокада (а не кажување како нешто да се направи); потсетување (се сеќаваш кога..или што ако бројот е… …и делумно завршени постапки што треба да се дополнат); дискусија со цел клас.

Ткаење на целото

Во овие последни поглавија ги дискутиравме ситуациските задачи (проблеми), наставните помагала и другите претстави за задачите (проблемите), како и важната улога на дискусијата и на јазикот, вклучувајќи ги прашањата што се поставуваат. Ниеден од овие елементи сам по себе нема да го подобри учењето. Нивната моќ се изразува кога се

---

145 Основи на ОИД (ER&D Foundations), Џер Брофи.

146 Black, P. и Wiliam, D. (1998) ”Внатрешноста на црната кутија: Подигање на стандардите преку оценување на час” Во *Phi Delta Kappan,* октомври 1998.

употребуваат заедно. Откако се собраа и проучија видео-касети со стотици наставни часа, Проектот 2061 заклучува дека постојат три важни области во кои:

> .. *истражувањата покажаа дека праксата на наставниците има многу значајна улога во совладување на математиката (1)математичките претстави што настав-ниците ги употребуваат, (2) вештината на наставниците да го извлечат знаењето од учениците, и (3) способноста на наставниците да го насочат размислувањето и толкувањето на учениците.*

Јазичните потреби и изучувачите на англискиот јазик

Заклучоците што се однесуваат на изучувачите на англискиот јазик, не се разликуваат премногу од останатите заклучоци што се однесуваат на тоа како децата учат математика. Наставниците, сепак, треба да бидат уште повеќе охрабрени да користат постапки кои имаат врска со животот на учениците и ги даваат нијансите или повеќекратните значења на зборовите што може да ги употребат. Постапките што им помагаат на учениците да се чувствуваат `културолошки` удобно се:[147]

- Користење на минато искуство (Nieto 1999)
- Употреба на имињата на учениците и ситуациите од нивниот живот и средина
- Употреба на јазикот како средство за изучување на математиката (Whitin & Whitin 2003)
- Поттик на учениците за користење на јазик со прашања (пр. “Што гледате на оваа графа?”) наместо само да прашаат за бројот или одговор со еден збор.
- Јасно предавање на англискиот вокабулар на “начин кој учениците нема да го заборават” (стр.253 од Teaching Children Mathematics)
- Употреба на вокабулар во контекст на наставник и со внимателно објаснување на значењата
- Употреба на игри и групни натпревари

Развој на вокабуларот

Математиката има вокабулар што понекогаш станува поважно од концептот што се претставува со збор. Еден од заклучоците на видео-касетата за студија на наставниот час на TIMSS, е дека во лекциите во кои учениците имаат најголеми шанси да научат математика, концептите на лекциите се развиени. На пример, наставникот не рекол само – ова е формулата за изнаоѓање на површината на кругот – и учениците ја пресметале. Напротив, наставникот почнал со активност низ која се појавува концептот што води до формулата.

---

[147] Дијана Торес Веласкез (Diane Torres-Velasquez) & Гилберто Лобо (Gilberto Lobo). Културолошки-одговорна настава по математика и изучувањето на англискиот јазик. Во *Teaching Children Mathematics* (дек.2004/јануари 2005). NCTM

МОДЕЛ ЗА ВОКАБУЛАР НА ФРЕЕР

Дефиниција Две или повеќе дропки што имаат иста вредност.	**Карактеристики** Броевите и именителите од секоја дропка, се во ист соодност. Тие го претставуваат истиот дел од количество или број.
Еднакви дропки	
Пример $\frac{1}{2}$ е еднакво на $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$ и $\frac{24}{48}$.	**Спротивен пример** $\frac{1}{2}$ не е еднакво на $\frac{3}{7}$.

Ваквата стратегија исто така овозможува вокабуларот да дојде до израз, штом учениците сфатат што значат одредените зборови. "Ова што сега го направи се вика...," наставникот може да каже откако учениците со свој јазик го објасниле сработеното. Јазикот и изразите изградени врз концептуалното разбирање имаат повеќе шанси да бидат запомнети и рабрани.

Втора стратегија за развој на вокабуларот извира од наставниот концепт. Фреер (Frayer) создал четвороделна графичка претстава. Во центарот е зборот или изразот што треба да се научи. Учениците пишуваат што тој значи, неговите карактеристики, еден пример и еден обратен пример.

Примерот претпоставува дека учениците имаат научено и други зборови пред да се сретнат со оваа табела, како на пример собирок, именител, соодност. Ако на учениците им се дозволи да ги обликуваат ваквите зборовни претстави од она што веќе го знаат, а не на почеток да им се даваат дефиниции од учебник, подобро ќе го разберат вокабуларот
Третата група препораки е за општата свест за математичкиот вокабулар што се среќава во секојдневниот живот. Рубинштајн (Rubenstein)[20] идентификува извесен број категории од зборови кои бараат посебно внимание, затоа што можат да ги забунат учениците. Во нив спаѓаат:

[20] Рита Рубинштајн (Rheta Rubenstein) (2007). Насочени стратегии за развој на вокабуларот во математиката на средните одделенија (Focused Strategies for Middle-Grades Mathematics Vocabulary Development. Во *Mathematics Teaching in the Middle School. Vol. 13, No. 4, ноември 2007*

- Зборови што во други контексти се употребуваат на друг начин. Пример: Сила (Power)
- Зборови што се наоѓаат во други дисциплини. Пример: Висина
- Зборови што ги има само во математиката. Пример: Именител
- Зборови со повеќекратно математичко значење. Пример: Коцка
- Зборови што се изучуваат во парови. Пример: Површина и периметар
- Зборови со сличен звук. Пример: Tens (десетки), tenths (десетте)
- Зборови чие значење се менува со одредени придавки. Пример: многуаголник–правилен многуаголник.
- Колку и да се овие категории на зборови проблематични за оние на кои англискиот јазик им е мајчин - природен, замислете ја двојната мака што им ја претставуваат на оние кои го изучуваат англискиот јазик. Учениците треба да бидат подучувани да развијат свест за математичките значења и разлики.